

7. Begriffe der Schätztheorie

7.2 Modellbildung

- **Signalmodell:** Analytische (ggf. approximative) Beschreibung des Signalverlaufs (deterministisch oder stochastisch)

7.2.1 Fehlermodell

- Annahme: additiver Fehler: $y(t) = x(t) + e(t)$
- Ohne Vorwissen: häufige Annahme der Störung als mittelwertfreies, weißes Rauschen

$$E\{e(t)\} = 0$$

$$r_{ee}(\tau) = E\{e(t + \tau) e(t)\} = \sigma_e^2 \cdot \delta(\tau)$$

- **Fehlermodell** beim Übergang auf zeitdiskrete Signale der Länge N :

$$\mathbf{e}(n) = [e(n) \ e(n-1) \ \dots \ e(n-N+1)]^T$$

$$\mathbf{R}_{ee} = E\{\mathbf{e}(n) \mathbf{e}^T(n)\} \stackrel{\text{Mittelwertfreiheit}}{=} \mathbf{C}_{ee} \stackrel{\text{Unkorreliertheit}}{=} \sigma_e^2 \cdot \mathbf{I}$$

7.2.2 Lineares Modell durch Zerlegung in Basisfunkt.

- **Zeitdiskretes Signal** $y(n)$ wird durch eine Linearkombination von Basisfunktionen beschrieben:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K-1} b_k \varphi_k(n) + e(n)$$

Dabei ist K gleich der Anzahl der Parameter bzw. Basisfunktionen

- Stehen N Messwerte zur Verfügung, so lassen sich N Gleichungen für das Signal zu unterschiedlichen Abtastzeitpunkten aufstellen:

$$y(n) = b_0 \cdot \varphi_0(n) + \dots + b_{K-1} \cdot \varphi_{K-1}(n) + e(n)$$

$$y(n-1) = b_0 \cdot \varphi_0(n-1) + \dots + b_{K-1} \cdot \varphi_{K-1}(n-1) + e(n-1)$$

$$\vdots$$

$$y(n-N+1) = b_0 \cdot \varphi_0(n-N+1) + \dots + b_{K-1} \cdot \varphi_{K-1}(n-N+1) + e(n-N+1)$$

- Messvektor:

$$\mathbf{y}(n) = [y(n) \ y(n-1) \ \dots \ y(n-N+1)]^T$$

- Fehlervektor:

$$\mathbf{e}(n) = [e(n) \ e(n-1) \ \dots \ e(n-N+1)]^T$$

- Beobachtungsmatrix:

$$\Phi(n) = \begin{bmatrix} \varphi_0(n) & \dots & \varphi_{K-1}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(n-N+1) & \dots & \varphi_{K-1}(n-N+1) \end{bmatrix}$$

- Basisvektoren:

$$\varphi_k(n) = [\varphi_k(n) \ \dots \ \varphi_k(n-N+1)]^T$$

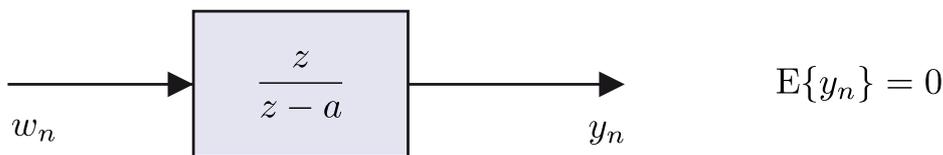
- **Signalmodell:**

$$\mathbf{y}(n) = \Phi(n) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{e}(n) = \sum_{k=0}^{K-1} b_k \varphi_k(n) + \mathbf{e}(n)$$

- Die Zeilenvektoren und Spaltenvektoren der Beobachtungsmatrix sind die sog. **Regressionsvektoren** bzw. **Basisvektoren**

7.2.4 Markov-Prozess

- **Markov-Prozess:** stochastischer Prozess y_n , der am Ausgang eines LTI-Systems 1. Ordnung resultiert, das mit weißem Rauschen w_n angeregt wird $\rightarrow y_n$ ist ein **farbiger** (korrelierter) Rauschprozess



- Zustand y_n hängt nur vom Vorzustand y_{n-1} und vom Eingang w_n ab:

$$y_n = a \cdot y_{n-1} + w_n \quad \circ \bullet \quad Y(z) = a \cdot z^{-1} Y(z) + W(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z-a} W(z) = G(z) W(z)$$

- Durch rekursives Einsetzen von y_n erhält man mit $0 < a < 1$ (Stabilität!):

$$y_n = \sum_{i=0}^{\infty} a^i w_{n-i} = g_n * w_n \quad \text{mit} \quad g_n = a^n \cdot \sigma_w$$

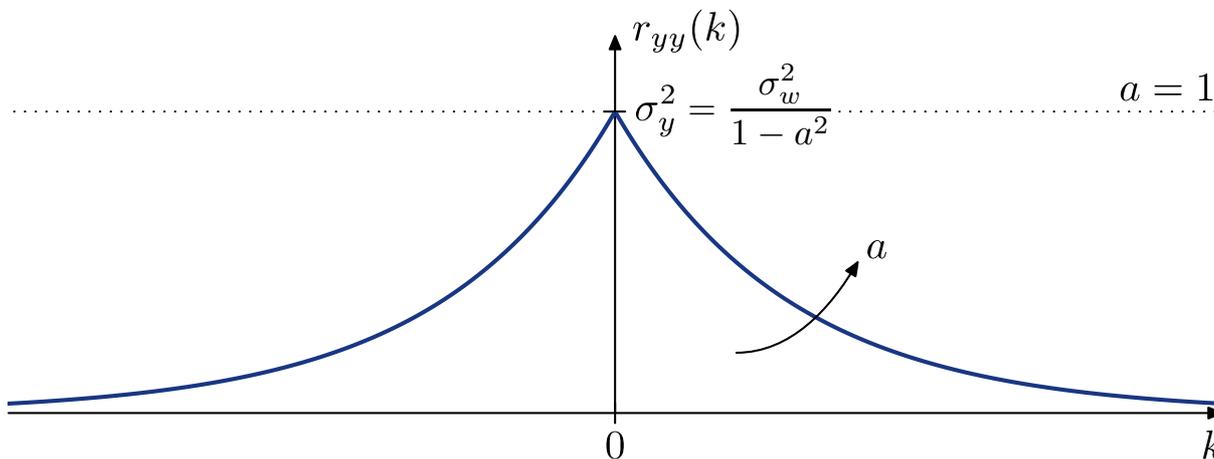
- Leistungsdichte und AKF des weißen **Eingangsprozesses** w_n :

$$S_{ww}(z) = \sigma_w^2 \quad \bullet \text{---} \circ \quad r_{ww}(k) = E\{w_{n+k} w_n\} = \sigma_w^2 \cdot \delta_k$$

- Leistungsdichte und AKF des **Ausgangsprozesses** y_n :

$$S_{yy}(z) = S_{ww}(z) |G(z)|^2 = \sigma_w^2 S_{gg}^E(z) \quad \bullet \text{---} \circ \quad r_{yy}(k) = \sigma_w^2 r_{gg}^E(k) = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2} a^{|k|}$$

- Einstellung der Charakteristik des farbigen Rauschens über a



- Für mittelwertfreie Prozesse $\mathbf{y}_n = [y_n, \dots, y_{n-N+1}]^T$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy} &= \mathbf{C}_{yy} \\ &= \begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(1) & \dots & r_{yy}(N-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) & \dots & r_{yy}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{yy}(1-N) & r_{yy}(2-N) & \dots & r_{yy}(0) \end{bmatrix} = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2} \begin{bmatrix} 1 & a & \dots & a^{N-1} \\ a & 1 & \dots & a^{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a^{N-1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Die **inverse Autokovarianzmatrix** kann geschlossen berechnet werden:

$$\mathbf{C}_{yy}^{-1} = \frac{1}{\sigma_w^2} \begin{bmatrix} 1 & -a & & & \mathbf{0} \\ -a & 1+a^2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -a & \\ & & -a & 1+a^2 & -a \\ \mathbf{0} & & & -a & 1 \end{bmatrix}$$

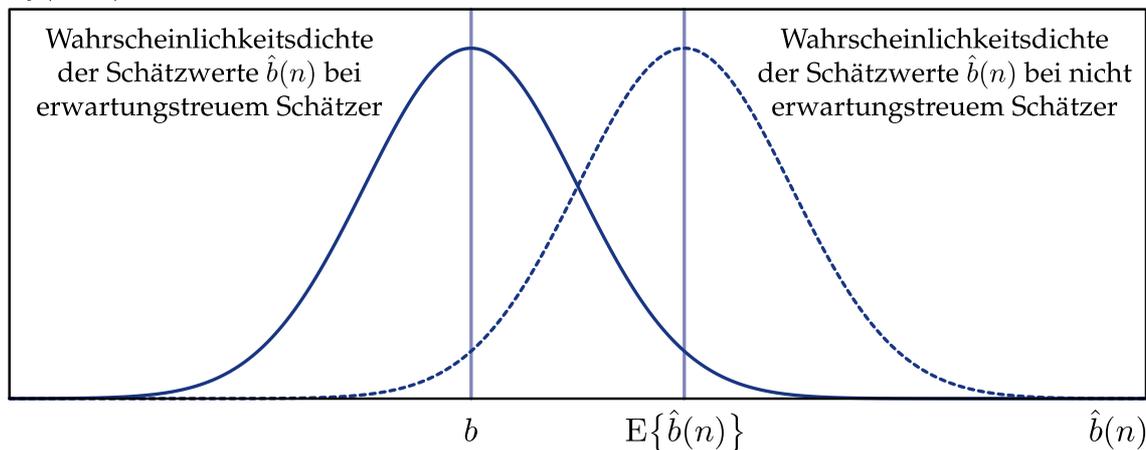
Dies ist ein Grund für die häufige Verwendung von Markov-Prozessen zur Modellierung farbiger Rauschprozesse (vgl. Abschn. 6.3)

7.3 Beurteilungskriterien von Schätzfiltern

7.3.1 Erwartungstreue

- **Aufgabenstellung:** Schätzung eines Parametervektors (wahrer Wert: \mathbf{b})
- Schätzwert des Parametervektors $\hat{\mathbf{b}}(n)$ wird als Zufallsvektor interpretiert, der bei jeder neuen Schätzung zu einem anderen Ergebnis führt

■ **Erwartungstreue:** $E\{\hat{\mathbf{b}}(n)\} = \mathbf{b}$

 $f_{\hat{\mathbf{b}}}(\hat{\mathbf{b}}(n))$


Erwartungstreue bei einer skalaren Schätzgröße b

- Der **systematische Schätzfehler** (engl.: *bias*) berechnet sich wie folgt:

$$\tilde{\mathbf{b}} = E\{\hat{\mathbf{b}}(n)\} - \mathbf{b}$$

- Hängt der *Bias* vom wahren Wert \mathbf{b} ab, so kann dieser **nicht** korrigiert werden

Asymptotische Erwartungstreue

- Für **asymptotisch** erwartungstreue Schätzer gilt (N : Stichprobenumfang)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{\mathbf{b}}(n)\} = \mathbf{b}$$

- Jeder erwartungstreue Schätzer ist auch asymptotisch erwartungstreu, aber nicht umgekehrt
- Erwartungstreue ist zwar eine wünschenswerte Eigenschaft; allerdings kann es nicht erwartungstreue Schätzer geben, die bessere Konvergenzeigenschaften besitzen als jeder erwartungstreue Schätzer:

Bei solchen Schätzern ist der mittlere quadratische Schätzfehler bei gegebenem Stichprobenumfang N oftmals kleiner

7.3.2 Konsistenz

Konsistenz

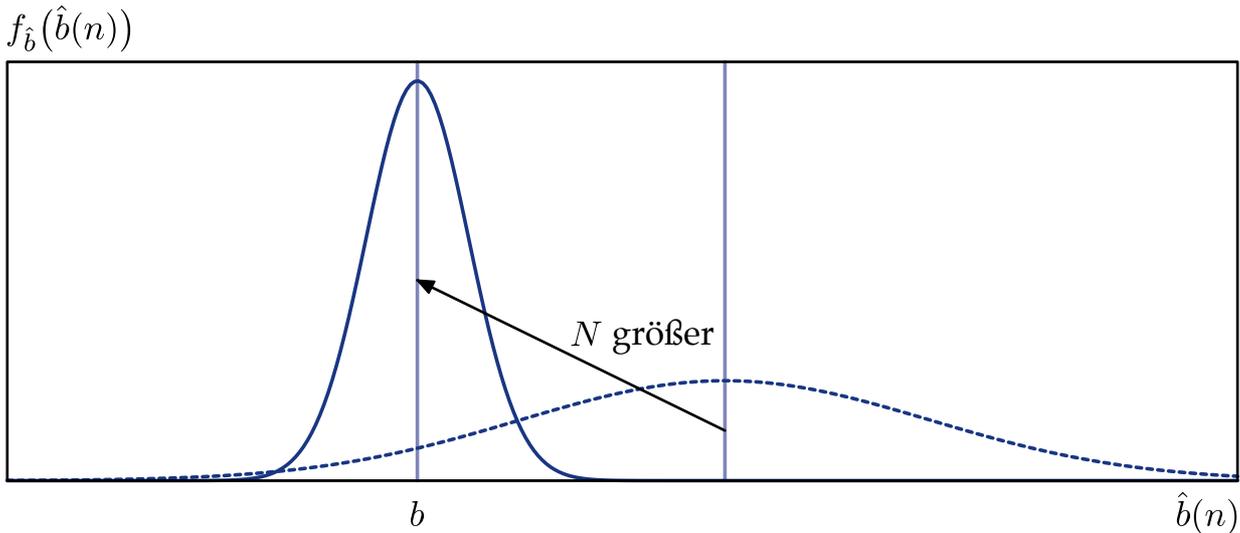
- Bei einem **konsistenten** Schätzer strebt die Schätzfehlerkovarianz mit wachsendem Stichprobenumfang $N \rightarrow \infty$ gegen null:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_{\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{b}}}(n) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}(n) - \mathbf{b}$$

- Für $N \rightarrow \infty$ nähert sich der Schätzwert $\hat{\mathbf{b}}(n)$ einer einzelnen Schätzung dem wahren Wert \mathbf{b} an:

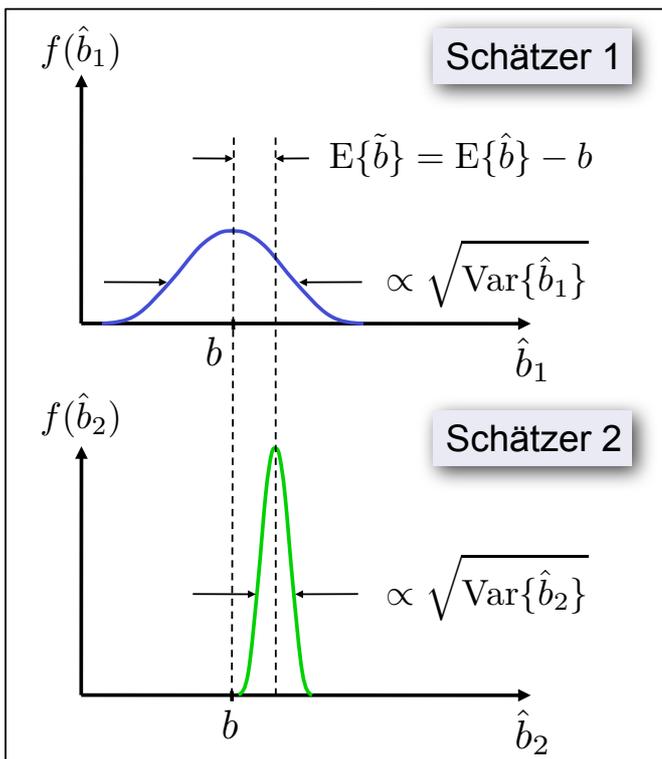
$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{\mathbf{b}}(n)\} = \mathbf{b}$$

- Daraus folgt, dass bei Konsistenz eine Erhöhung des Stichprobenumfangs N die Qualität der Schätzung verbessert
- Jeder konsistente Schätzer ist zumindest **asymptotisch erwartungstreu**
- Es gibt Schätzer, die erwartungstreu, aber nicht konsistent sind
- Ist eine größere Anzahl N an Messwerten verfügbar, so ist ein konsistenter Schätzer vorzuziehen, sofern ein solcher Schätzer existiert



Konsistenz bei einem asymptotisch erwartungstreuen Schätzer:
 Eine Erhöhung der Anzahl der Messwerte N
 für eine Schätzung verbessert das Ergebnis der Schätzung

Diskussion: Erwartungstreue, Varianz, mittlerer quadratischer Fehler



b sei wahrer Wert

Schätzer \hat{b}_1 : erwartungstreu

Schätzer \hat{b}_2 : nicht erwartungstreu, aber:

$$\sqrt{\text{Var}\{\hat{b}_2\}} < \sqrt{\text{Var}\{\hat{b}_1\}}$$

$\text{Var}\{.\}$: **stochastischer Fehler**

Bias $E\{\tilde{b}\}$: **systematischer Fehler**

Welcher Schätzer ist besser?

$$E\{(\hat{b} - b)^2\} = E^2\{\tilde{b}\} + \text{Var}\{\hat{b}\} : \text{mittlerer quadratischer Fehler}$$

Effizienz (Wirksamkeit)

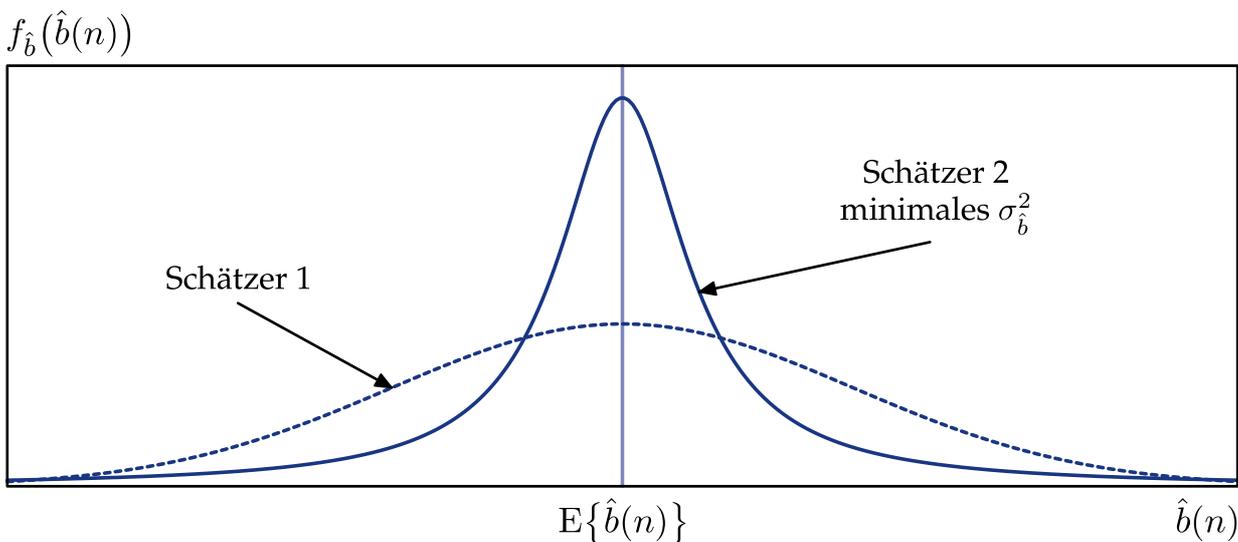
- Die Schätzfehlerkovarianz ist bei einem **effizienten** Schätzer für einen vorgegebenen Stichprobenumfang N minimal, d. h. es existiert kein anderes Schätzfilter mit einer kleineren Schätzfehlerkovarianz:

$$\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{b}}}(n) = E\left\{(\hat{\mathbf{b}}(n) - \mathbf{b})(\hat{\mathbf{b}}(n) - \mathbf{b})^T\right\} \xrightarrow{!} \min$$

Anmerkungen

- Bei **erwartungstreuen** Schätzern gibt es eine theoretische Untergrenze für die Schätzfehlerkovarianz (**Cramér-Rao-Grenze**) – Schätzer, die diese Grenze erreichen, sind **effizient**
- Zu einem gegebenen Problem existiert jedoch nicht zwangsläufig ein Schätzer, der diese Grenze erreicht

7.3.3 Effizienz



Ein effizienter Schätzer hat eine minimale Schätzfehlerkovarianz